ZORRO

Profesor
Edson Curahua

PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES

FÓRMULAS BÁSICAS

FÓRMULAS ADICIONALES

RAZÓN DE ÁREAS

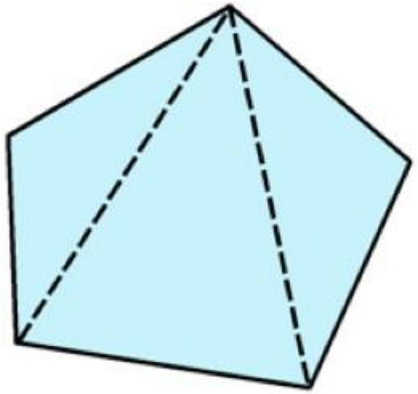
PROPIEDADES

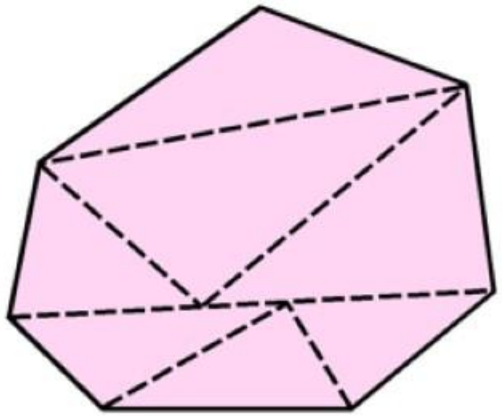
ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES

REGIONES POLIGONALES

Una región triangular es un conjunto de puntos, reunión de un triángulo y su interior.

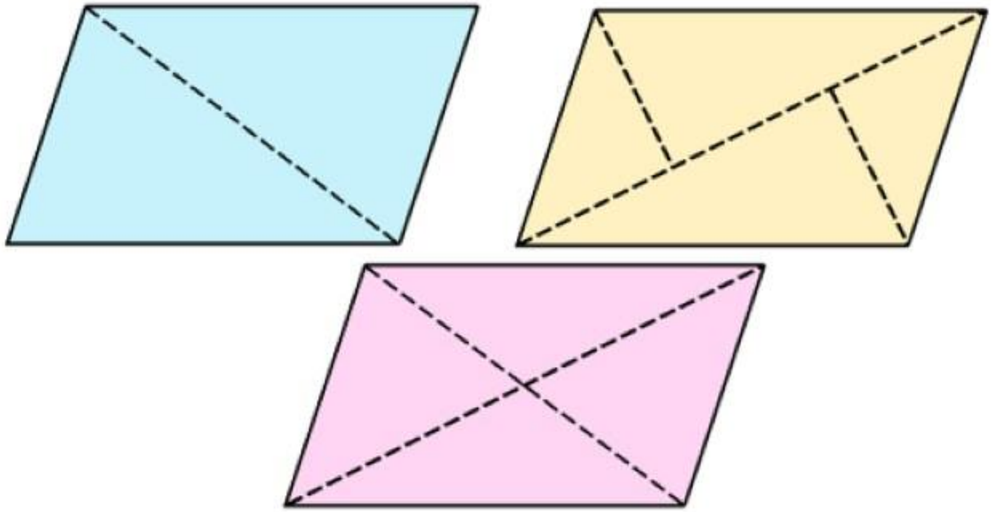
Una región poligonal es la reunión de un número finito de regiones triangulares que se encuentran en un plano dado, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.





Las líneas punteadas en las figuras anteriores indican cómo se podría representar cada una de las dos regiones poligonales mediante tal reunión. Las regiones triangulares de cualquier descomposición así se llaman regiones triangulares componentes de la región poligonal.

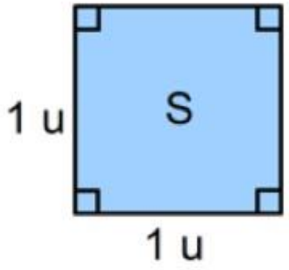
A continuación se muestra tres formas de dividir en regiones triangulares, la región correspondiente a un paralelogramo.



ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES

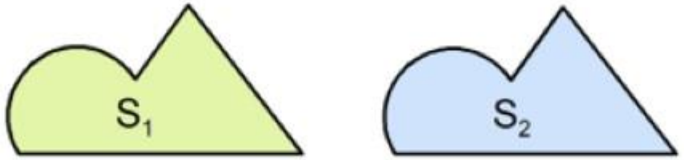
POSTULADOS

01. **Unidad de área:** Dado un cuadrado cuyo lado mide 1 u, entonces el área de la región cuadrada será 1 u^2.



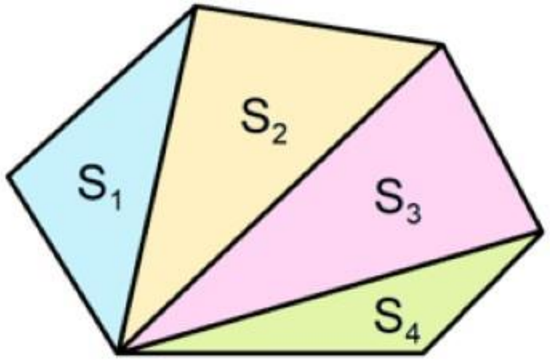
$$S = 1\ u^2$$

02. Si dos regiones son congruentes, entonces sus áreas serán iguales.



$$S_1 = S_2$$

03. El área de una región poligonal es la suma de las áreas de cualquier conjunto de regiones componentes en el cual puede dividirse.

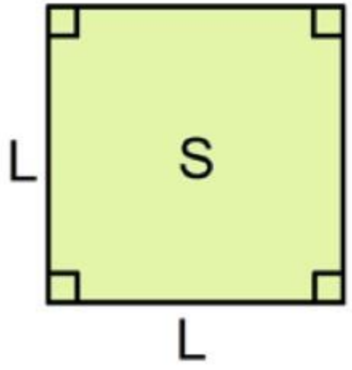


$$A_{TOTAL} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES

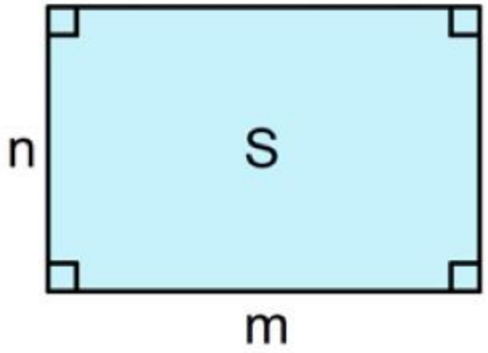
TEOREMAS

01. El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la medida de su lado.



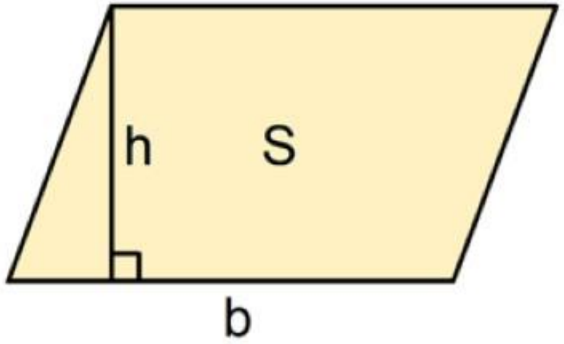
$S = L^2$

02. El área de una región rectangular es igual al producto de sus dos dimensiones.



$S = m.n$

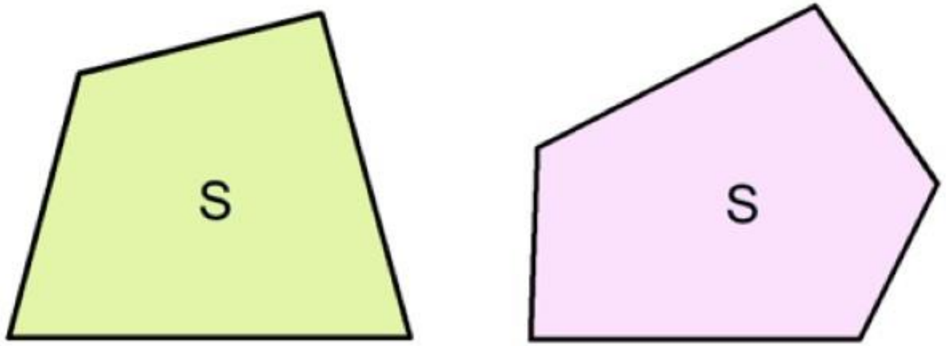
03. El área de una región paralelográmica será igual al producto entre su base y altura.



$S = b.h$

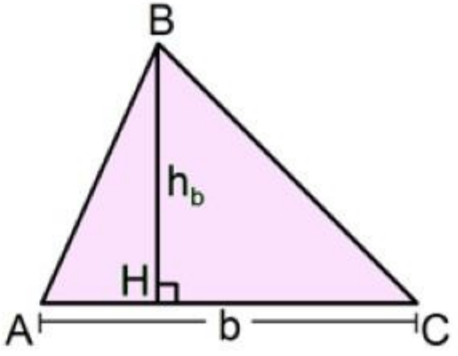
OBSERVACIÓN:

Dos regiones que tienen igual área se dice que son regiones equivalentes.

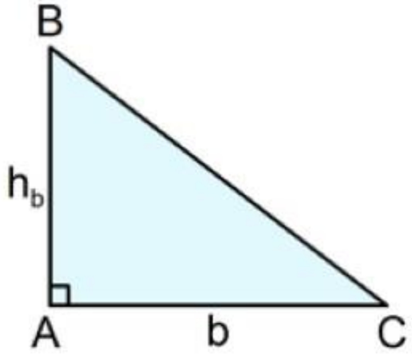


FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

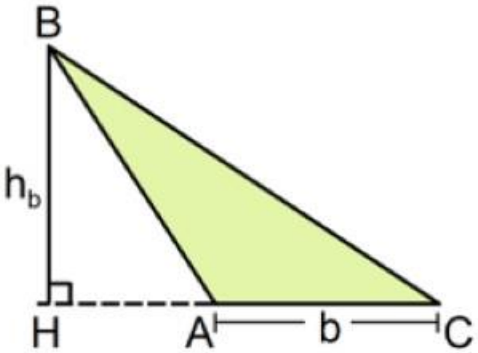
FÓRMULA FUNDAMENTAL



$$S_{ABC} = \frac{b.h_b}{2}$$

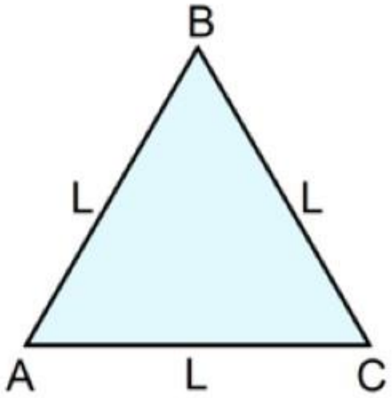


$$S_{ABC} = \frac{b.h_b}{2}$$



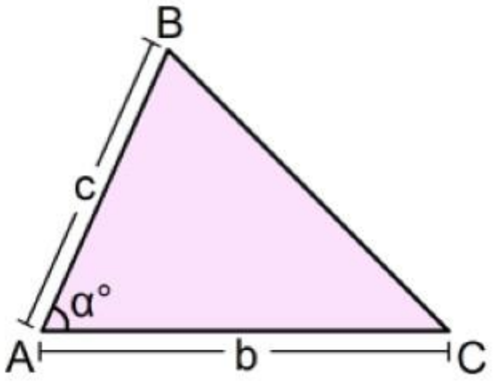
$$S_{ABC} = \frac{b.h_b}{2}$$

NOTA:



$$S_{ABC} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

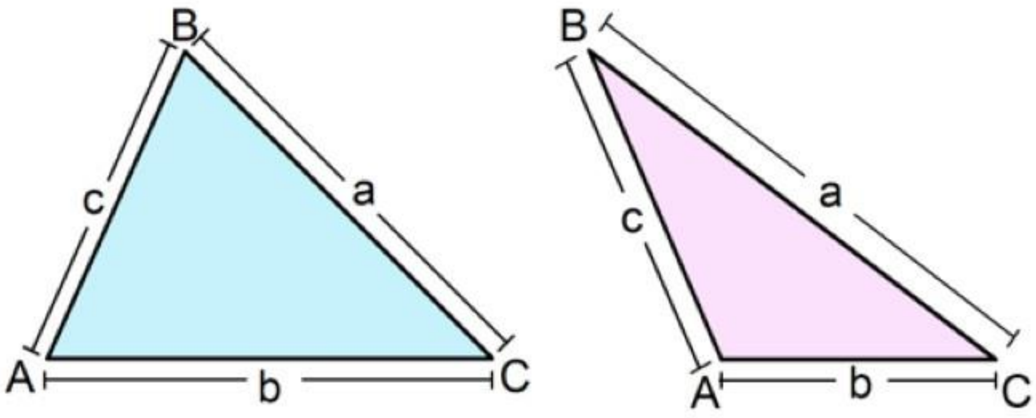
FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA



$$S_{ABC} = \frac{b.c}{2}.\operatorname{sen}\alpha°$$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

FÓRMULA DE HERÓN



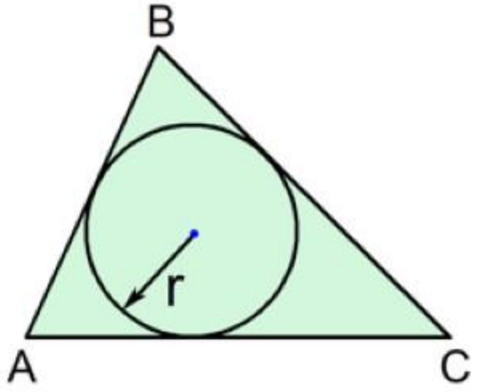
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

FÓRMULAS ADICIONALES

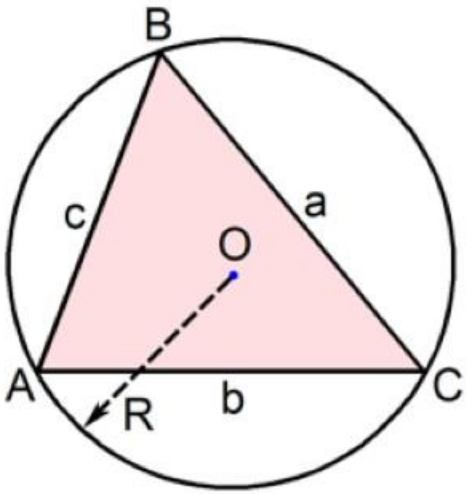
1) EN FUNCIÓN DEL INRADIO



$$S_{ABC} = p.r$$

p es semiperímetro

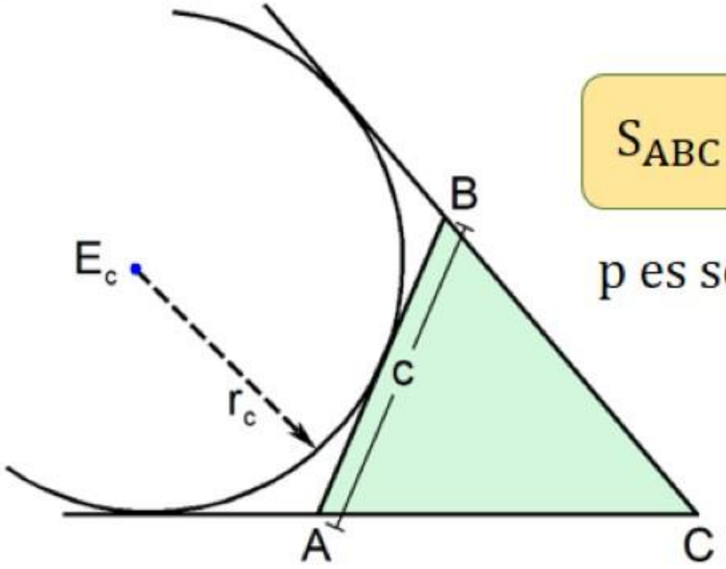
2) EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO



$$S_{ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

3) EN FUNCIÓN DEL EXRADIO



$$S_{ABC} = (p - c).\, r_c$$

p es semiperímetro

4) EN FUNCIÓN DEL INRADIO Y LOS EXRADIOS

Sea "r" la medida del inradio de un triángulo ABC y "r_a", "r_b" y "r_c" las medidas de sus tres exradios , entonces:

$$S_{ABC} = \sqrt{r.\, r_a.\, r_b.\, r_c}$$

RELACIONES IMPORTANTES

01. En todo triángulo el inverso del inradio es igual a la suma de las inversas de las alturas

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

02. En todo triángulo el inverso del inradio es igual a la suma de las inversas de los tres exradios.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

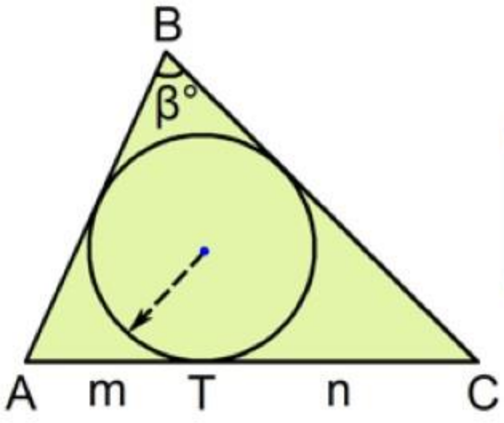
03. Para todo triángulo el inverso del exradio relativo a un lado es igual a la suma de las inversas de los exradios relativos a los otros dos menos el inverso de la altura relativa al mismo lado.

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$$

04. Teorema de Steiner

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

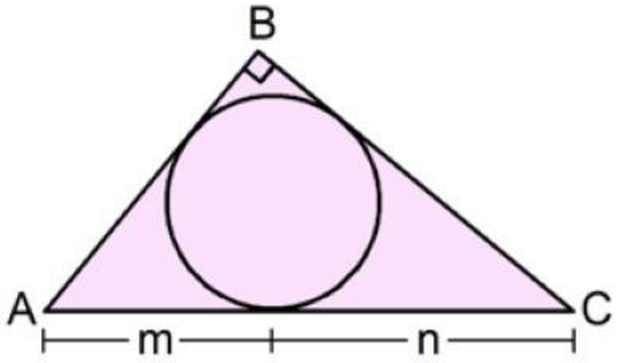
PROPIEDAD



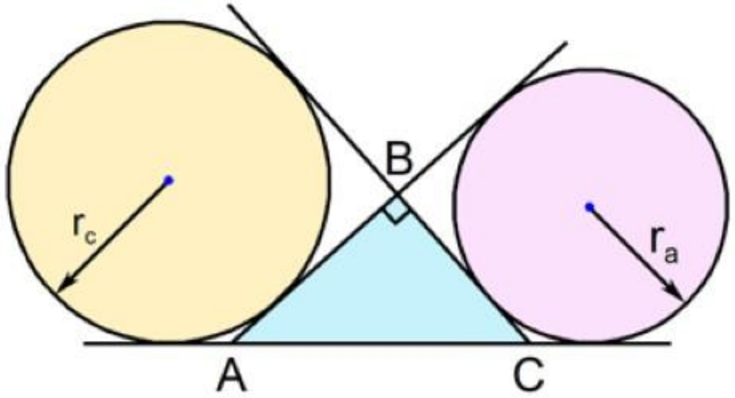
$$S_{ABC} = m.n.\mathrm{ctg}\left(\frac{\beta°}{2}\right)$$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

ÁREA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO



$$S_{ABC} = m.n$$

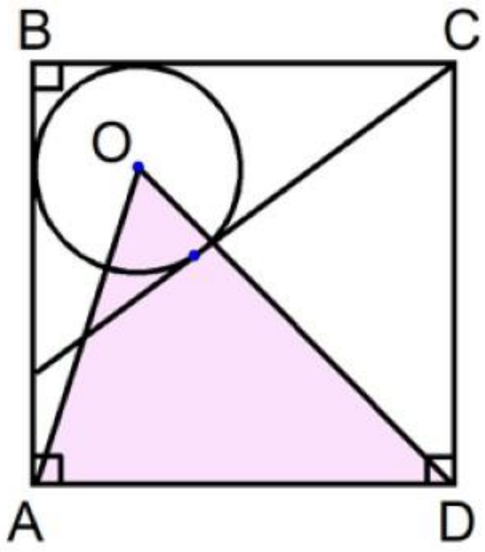


$$S_{ABC} = r_c.r_a$$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

Ejemplo 01:

Si el lado del cuadrado ABCD mide 8 y el radio de la circunferencia mide 2, calcular el área de la región triangular AOD.



A) 12 B) 16 C) 18
D) 24 E) 36

Ejemplo 02:

Dado un triángulo ABC se inscribe una semicircunferencia de radio 6, cuyo diámetro se encuentra contenido en el lado $\overline{AC}$. Calcular el área de la región triangular ABC, si AB=8 y BC=9.

A) 61 B) 51 C) 41
D) 33 E) 81

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

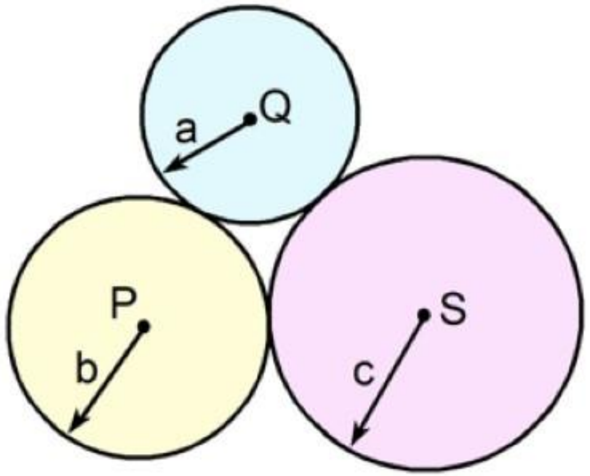
Ejemplo 03:

En un triángulo escaleno se cumple que su área es numéricamente igual al triple de su perímetro. Calcular la medida del radio de la circunferencia inscrita en este triángulo.

A) 2 B) 3 C) 6
D) 4 E) 1,5

Ejemplo 04:

Calcular el área de la región triangular PQS, si a=6, b=7 y c=8.



A) 42 B) 56 C) $36\sqrt{5}$
D) 84 E) $12\sqrt{15}$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

Ejemplo 05:

Se tiene un triángulo ABC, m∠B=60, siendo el incentro el punto O. Calcular el área de la región triangular AOC, si OA=6 y OC=8.

A) $15\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$

D) $8\sqrt{3}$ E) $24\sqrt{3}$

Ejemplo 06:

Calcular el área de la región limitada por un triángulo rectángulo de inradio 2 y circunradio 5.

A) 10 B) 24 C) 36

D) 20 E) 18

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

Ejemplo 07:

En un triángulo cuyos lados miden 5; 6 y 7, calcular el producto entre el inradio y el circunradio

A) $\frac{25}{6}$ B) $\frac{35}{6}$ C) $\frac{24}{5}$

D) $\frac{30}{7}$ E) $\frac{42}{5}$

Ejemplo 08:

Calcular el área de la región correspondiente a un hexágono equiángulo ABCDEF, si AB=3, CD=6, DE=2 y EF=4.

A) $20\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $\frac{85\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{93\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{83\sqrt{3}}{4}$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

Ejemplo 09:

Se tiene un cuadrante AOB, AO=OB. En el arco AB se ubica el punto P, tal que AP=$\sqrt{8}$ y PB=6. Calcular el área de la región triangular APB.

A) 4 B) 6 C) 8

D) $\sqrt{12}$ E) $2\sqrt{5}$

Ejemplo 10:

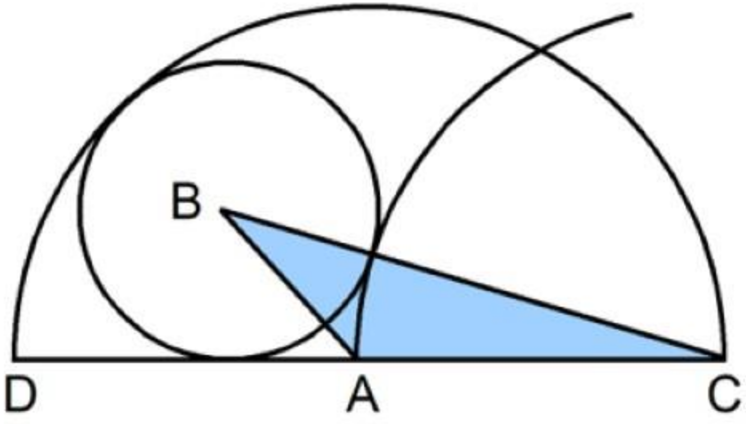
En el triángulo ABC: AB=9, BC=11 y AC=10. Calcular el área de la región triangular AIC, si I es el incentro del triángulo ABC.

A) 15 B) $6\sqrt{2}$ C) 12

D) $10\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

Ejemplo 11:

Si A, B y C son centros, calcular el área de la región triangular ABC (AC=8).



A) 8 B) $4\sqrt{3}$ C) 16
D) $8\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{3}$

Ejemplo 12:

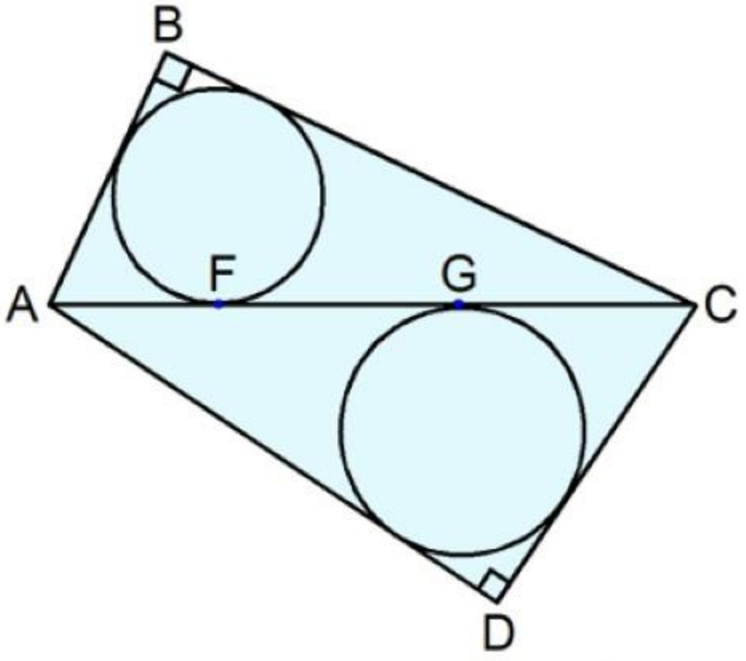
En un triángulo ABC: r_a, r_b y r_c son las medidas de los exradios. Si $r_a.r_b+r_a.r_c+r_b.r_c=100$, calcular el perímetro del triángulo.

A) 10 B) $10\sqrt{2}$ C) 20
D) 50 E) 25

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA

Ejemplo 13:

En la figura AF=2, FG=3 y GC=4, además F y G son puntos de tangencia. Calcular el área de la región cuadrangular ABCD.



A) 24 B) 26 C) 28
D) 30 E) 34

Ejemplo 14:

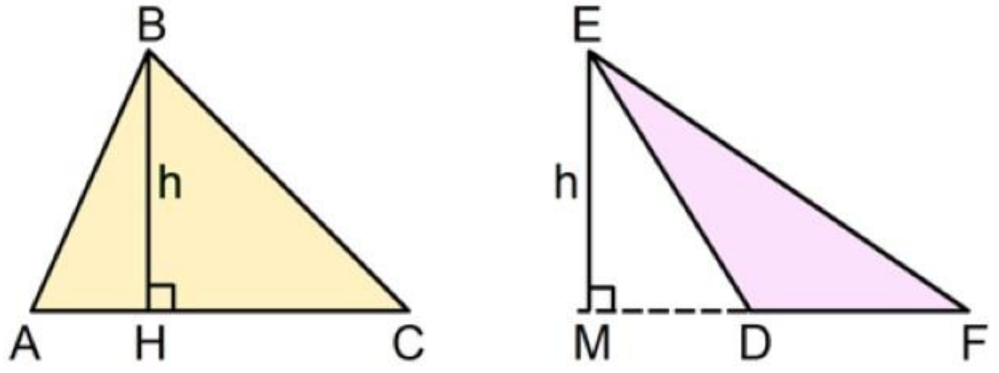
En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$ tal que BD.DC=16. Sea E un punto de $\overline{AC}$ tal que m$\angle$ADE=45, calcular el área de la región triangular EDC.

A) 8 B) $4\sqrt{2}$ C) 16
D) 10 E) 24

RAZÓN DE ÁREAS

RAZÓN DE ÁREAS DE DOS REGIONES TRIANGULARES

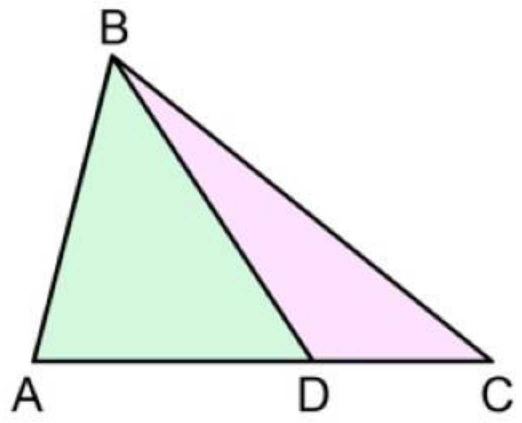
01. Si dos triángulos tienen alturas congruentes, entonces la razón entre sus áreas será igual a la razón entre las medidas de sus respectivas bases.



Si BH=EM → $\boxed{\dfrac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \dfrac{AC}{DF}}$

Consecuencias

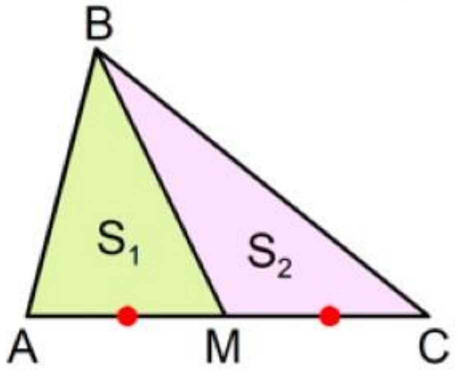
a) Si en el triángulo ABC se traza la $\overline{BD}$, entonces la razón entre las áreas de los triángulos ABD y DBC será igual a la razón entre AD y DC.



$$\boxed{\dfrac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \dfrac{AD}{DC}}$$

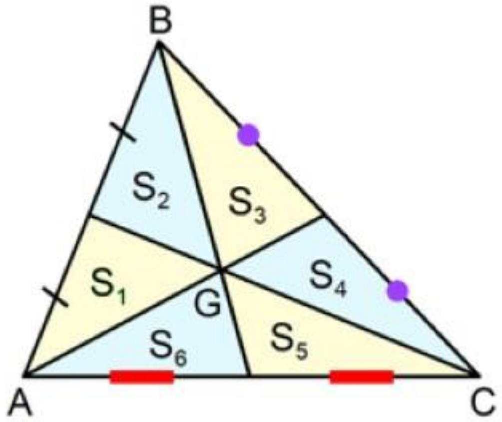
RAZÓN DE ÁREAS

b) Si en el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$, entonces los triángulos ABM y BMC serán equivalentes, es decir, tendrán áreas iguales.



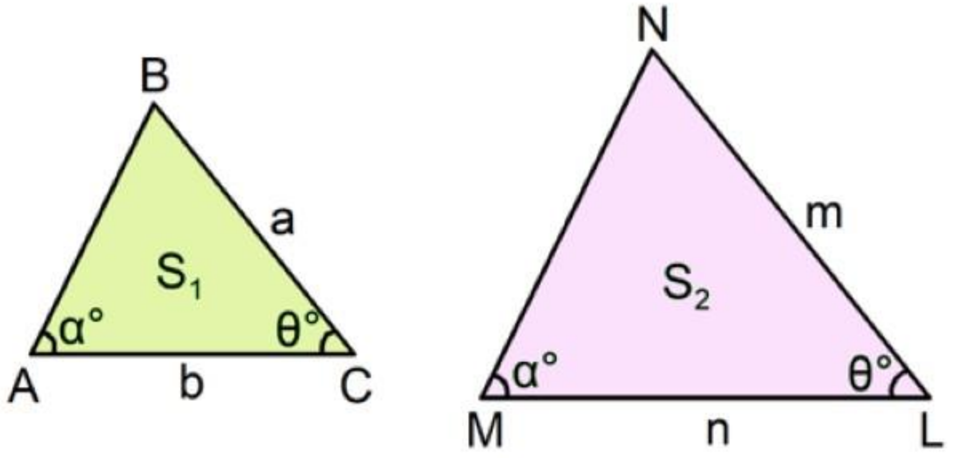
$$S_1 = S_2$$

c) Si G es el baricentro del triángulo ABC, entonces:



$$S_1 = S_2 = \cdots = S_6$$

02. Si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre sus áreas será igual a la razón entre los cuadrados de sus elementos homólogos.

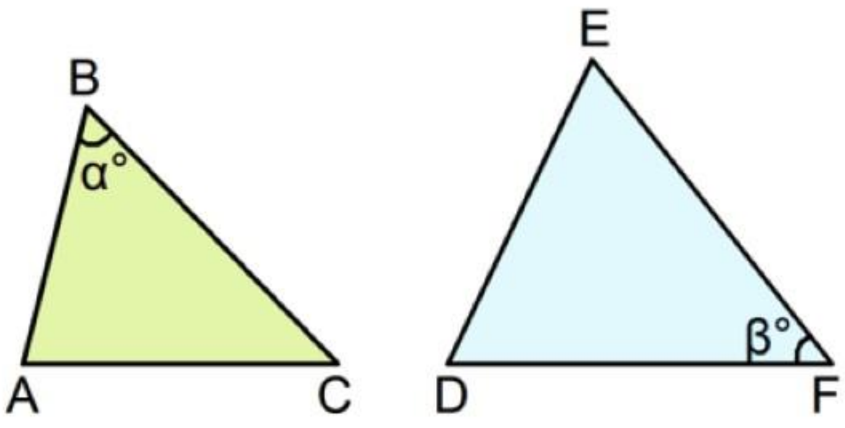


Si $\Delta ABC \sim \Delta MNL$, entonces:

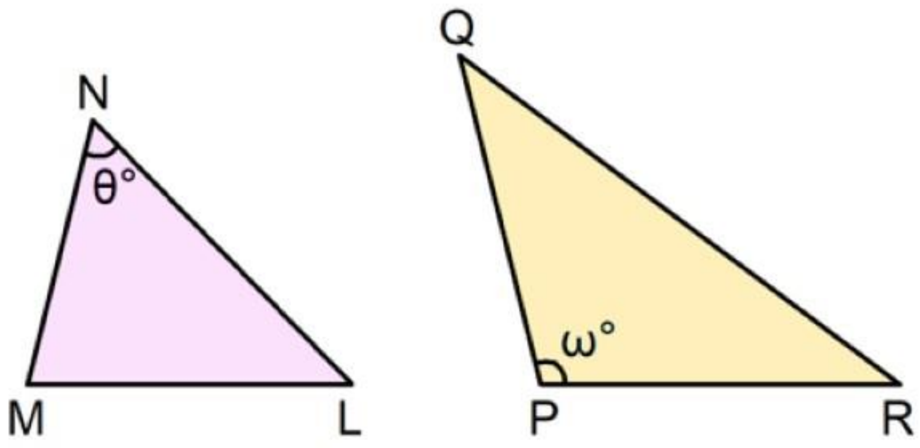
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{a^2}{m^2}$$

RAZÓN DE ÁREAS

03. Si dos triángulos tienen ángulos congruentes o suplementarios, entonces la relación entre sus áreas será igual a la relación entre los productos de las medidas de los lados que forman dichos ángulos.



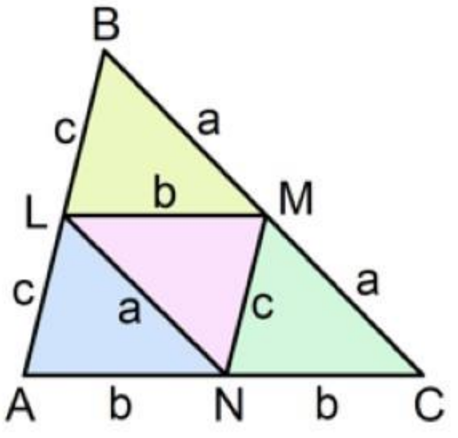
Si $\alpha = \beta \quad \rightarrow \quad \boxed{\dfrac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \dfrac{AB.BC}{EF.DF}}$



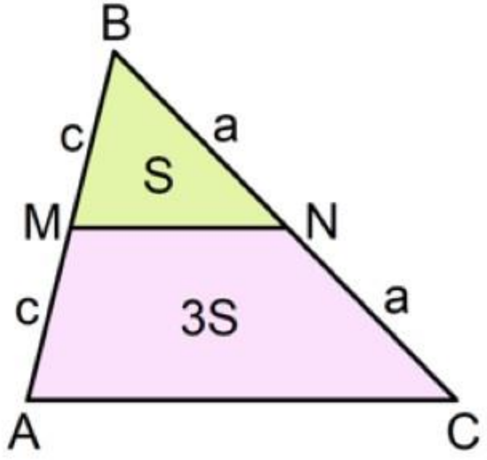
Si $\theta + \omega = 180 \rightarrow \boxed{\dfrac{S_{MNL}}{S_{PQR}} = \dfrac{MN.NL}{PQ.PR}}$

RAZÓN DE ÁREAS

PROPIEDADES

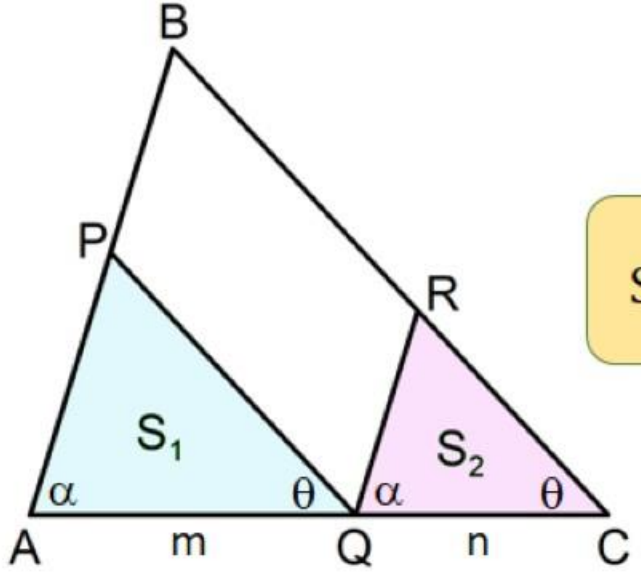


$$S_{MNL} = \frac{S_{ABC}}{4}$$



$$S_{AMNC} = 3(S_{MBN})$$

Si $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$, entonces:



$$S_{ABC} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$$

Demostración:

$\Delta APQ \sim \Delta ABC$:

$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{m^2}{(m+n)^2} \qquad \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{m}{m+n}$$

$\Delta QRC \sim \Delta ABC$:

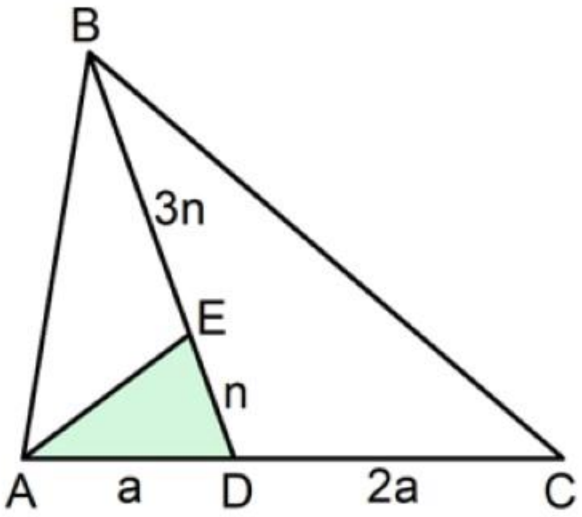
$$\frac{S_2}{S_{ABC}} = \frac{n^2}{(m+n)^2} \qquad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_{ABC}}} = 1$$

RAZÓN DE ÁREAS

Ejemplo 15:

Si el área de la región sombreada es 6, calcular el área de la región triangular ABC.



A) 120 B) 108 C) 72
D) 54 E) 84

Ejemplo 16:

En un triángulo ABC se traza $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, M en $\overline{AB}$ y N en $\overline{BC}$, de modo que el triángulo queda dividido en dos regiones equivalentes. Si MN=2, calcular AC.

A) $\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 4
D) 6 E) $2\sqrt{2}$

RAZÓN DE ÁREAS

Ejemplo 17:

Dos medianas de un triángulo se intersecan perpendicularmente y miden 9 y 12. Calcular el área de la región correspondiente al triángulo.

A) 36 B) 48 C) 64
D) 70 E) 72

Ejemplo 18:

Se tiene un trapecio cuyas bases miden 1 y 7. Calcular la medida de la paralela a las bases que determina dos trapecios parciales equivalentes.

A) 4 B) 5 C) $5\sqrt{2}$
D) 5,5 E) $4\sqrt{3}$

RAZÓN DE ÁREAS

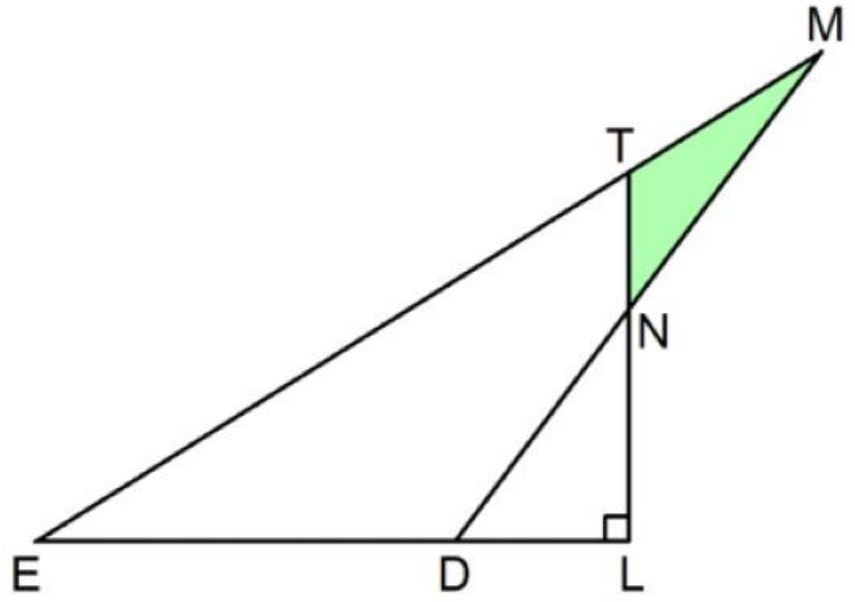
Ejemplo 19:

Se tiene un triángulo cuyos lados miden 40, 50 y 30. Calcular el área de la región triangular determinada al unir el ortocentro, incentro y circuncentro del triángulo.

A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 40

Ejemplo 20:

En el gráfico TN=NL=4, 5(ED)=7(DL)=35. Calcular el área de la región sombreada.

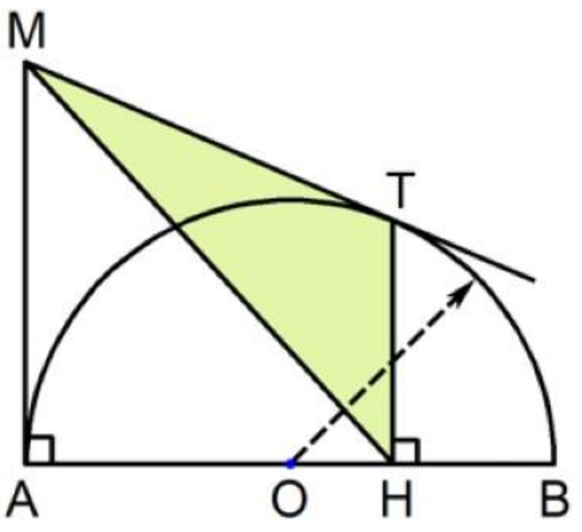


A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

PROBLEMAS PROPUESTOS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

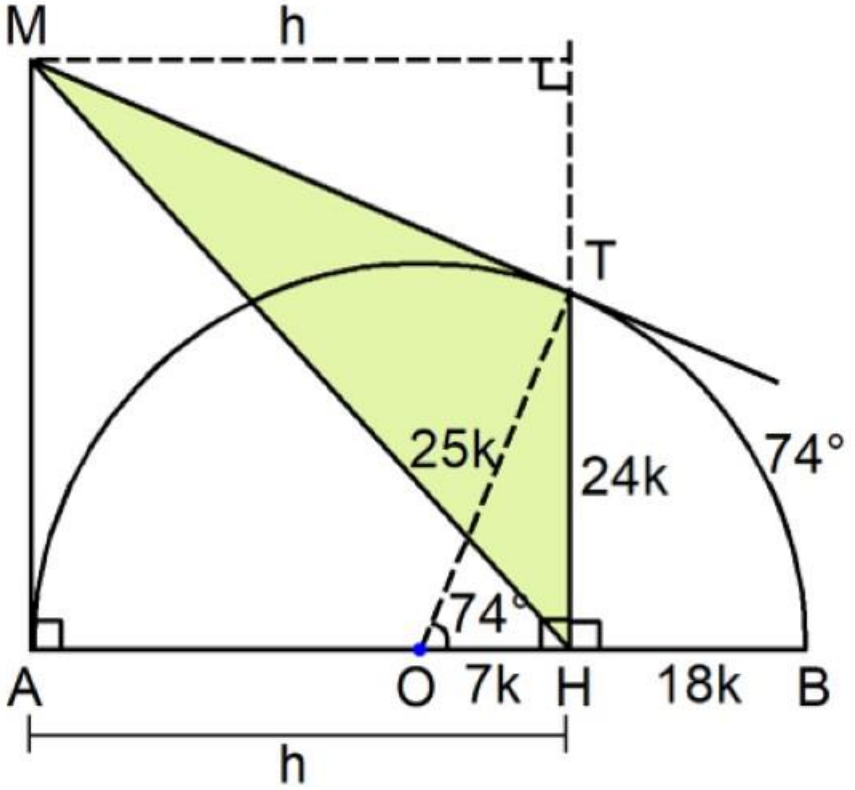
01. En el gráfico, T punto de tangencia, $m\widehat{TB} = 74$ y (BO)(AH)=80, calcule el área de región triangular MTH.



A) 18,4 B) 28,4 C) 38,4
D) 48,4 E) 58,4

Resolución:

Dato: (BO)(AH)=80



Por dato: (25k)(h)=80 → kh=3,2

Luego:

$$S_{MTH} = \frac{(24k).h}{2} = 12kh = 38,4$$

Rpta. C

02. En un triángulo ABC, se traza $\overline{BM}$ (M∈$\overline{AC}$) tal que $AM = \frac{3}{4}MC$, por M se traza $\overline{MH} \perp \overline{BC}$ (H∈$\overline{BC}$) y por A se traza $\overline{AE} \perp \overline{BM}$ (E∈$\overline{BM}$). Si MH=8 u, AE=$6\sqrt{3}$ u y m∠MBC=30, calcule el área del triángulo MHC (en u²).

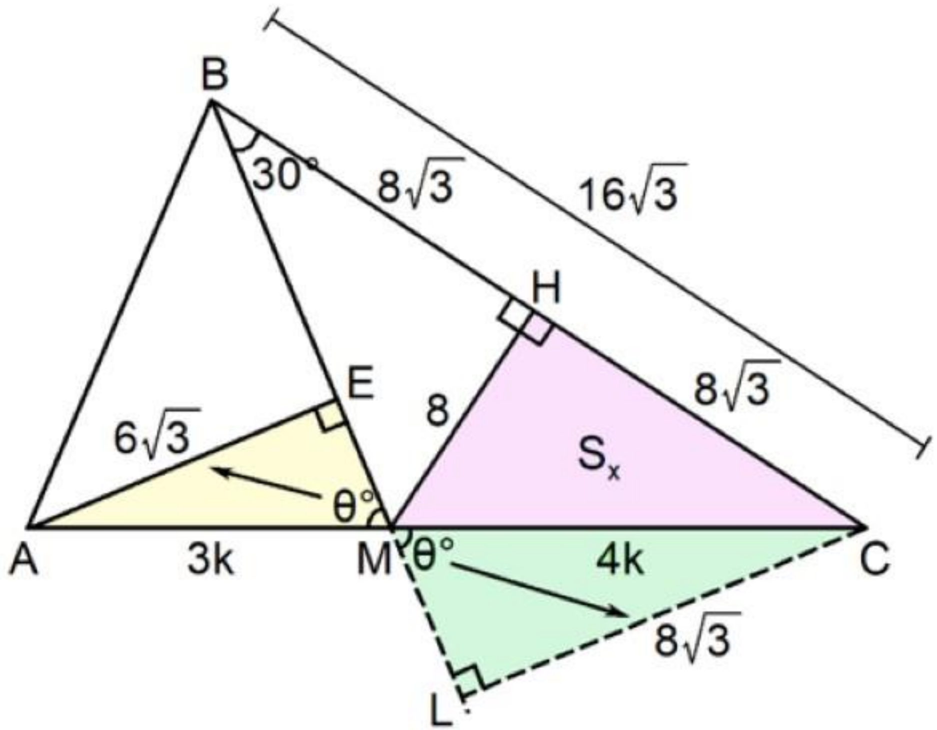
A) $30\sqrt{3}$ B) $32\sqrt{3}$ C) $34\sqrt{3}$

D) $36\sqrt{3}$ E) $38\sqrt{3}$ (UNI 2017-1)

Resolución:

Se traza $\overline{CL} \perp \overline{BM}$ (B-M-L), luego:

$\Delta AEM \sim \Delta CLM \rightarrow CL = 8\sqrt{3}$



En ΔBHM (notable 30 y 60): BH=$8\sqrt{3}$

En ΔBLC (notable 30 y 60): BC=$16\sqrt{3}$

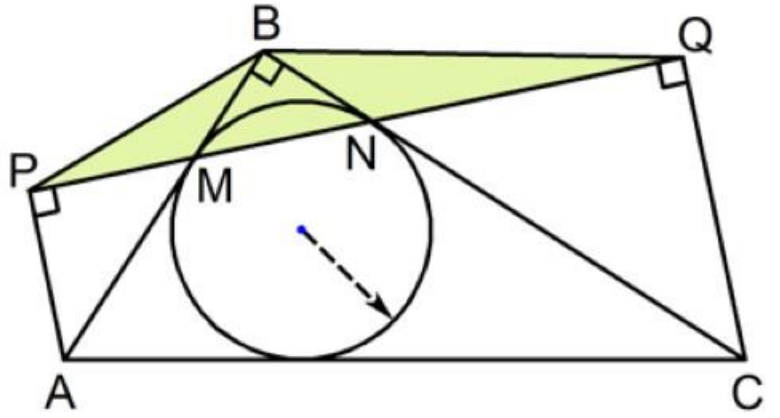
$\rightarrow HC = 8\sqrt{3}$

$$\therefore S_x = \frac{8\sqrt{3}.8}{2} = 32\sqrt{3}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. En el triángulo rectángulo ABC, recto en B; M y N son puntos de tangencia, r es radio de la circunferencia inscrita. Calcular el área de la región triangular PBQ, si AC=c.



A) $\frac{r}{2}(c+r)$ B) $\frac{r}{2}(c+\frac{r}{2})$ C) $\frac{r}{2}(\frac{c}{2}+r)$

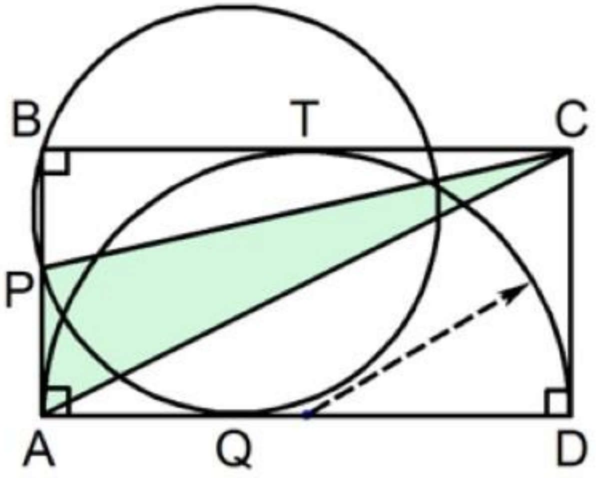
D) $r(c+\frac{r}{2})$ E) $c(c+\frac{r}{2})$

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. En la figura mostrada $\overline{AD}$ es diámetro, Q y T son puntos de tangencia. Si AQ=2, calcular el área de la región triangular APC.



A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) 2 E) 1

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

05. En los lados AB y BC de un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q respectivamente, de modo que PB=4(AP) y 7(BQ)=2(QC). Si el área de la región cuadrangular APQC es 37 m^2. Calcule el área (en m^2) de la región triangular PBQ.

A) 4 B) 12 C) 6

D) 8 E) 10

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

06. Dado un trapecio, cuyas bases miden 6 cm y 2 cm, se traza una paralela a las bases de tal manera que dicho trapecio es dividido en dos regiones cuyas áreas son iguales. Halle la longitud de la paralela (en cm).

A) $2\sqrt{5}$ B) 4 C) $3\sqrt{5}$

D) 8 E) $4\sqrt{5}$

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

07. En un semicircunferencia de diámetro AB y radio R, se ubican los puntos M y N, tal que $AM=R\sqrt{2}$ y $BN=R\sqrt{3}$. Calcular S_{ANM}.

A) $\frac{R^2}{4}(\sqrt{3}+1)$ B) $\frac{R^2}{4}(2-\sqrt{3})$ C) $\frac{R^2}{4}(\sqrt{3}-1)$

D) $\frac{R^2}{2}(\sqrt{3}-1)$ E) $R^2(\sqrt{3}+1)$

Resolución:

Rpta. C

08. En un triángulo ABC: AC=b, AB=c y CB=a; el radio de la circunferencia exinscrita relativa al lado $\overline{BC}$ es el doble del radio de la circunferencia inscrita. Calcular $\frac{b+c}{a}$.

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2

D) 1/2 E) 3

Resolución:

Rpta. E

09. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, tomando como diámetro al cateto AB se traza una semicircunferencia que pasa por el baricentro G del triángulo ABC. Si AG=4, calcular S_{ABC}.

A) 15 B) 24 C) $18\sqrt{3}$

D) $12\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{6}$

Resolución:

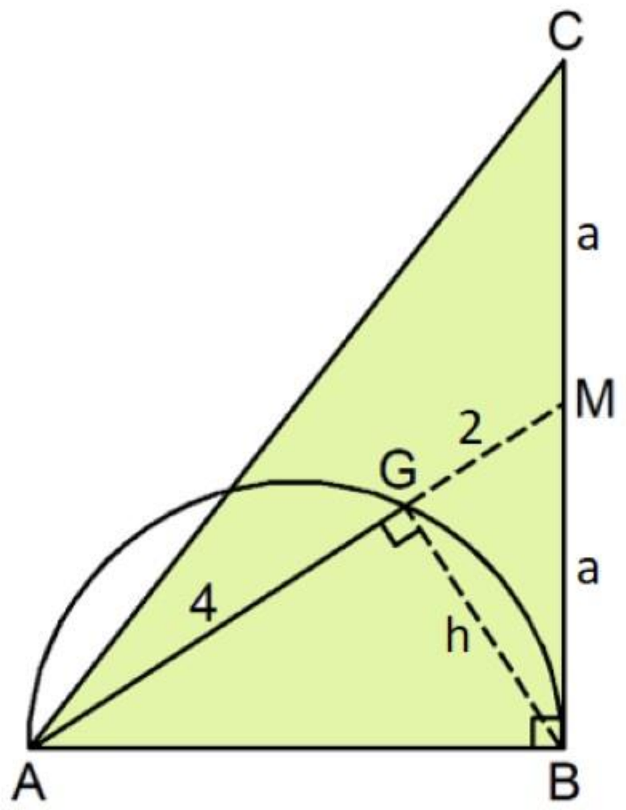
Se prolonga $\overline{AG}$ hasta intersecar a $\overline{BC}$ en M, se traza también: $\overline{BG}$, entonces:

BM=MC=a y GM=2

Además: m∠AGB=90

Por RM en ΔABM:

$$h^2 = 4.2 \;\; \rightarrow h = 2\sqrt{2}$$



Finalmente:

$$S_{ABM} = \frac{6.h}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{ABC} = 2.S_{ABM} = 12\sqrt{2} \qquad \text{Rpta. D}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10. En un triángulo ABC, la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$, y de centro O, es tangente a $\overline{BC}$ en T; luego, la semicircunferencia de diámetro BC interseca a $\overline{OT}$ en P. Si PT=6 cm y m∠BAC=53, calcular el área de la región triangular ABC.

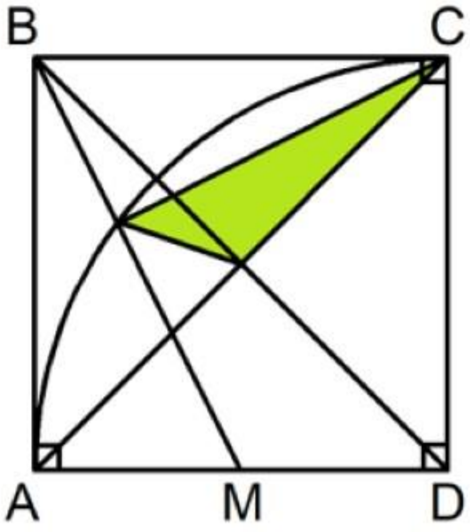
A) 28 cm^2 B) 36 cm^2 C) 72 cm^2
D) 24 cm^2 E) 37 cm^2

Resolución:

Rpta. C

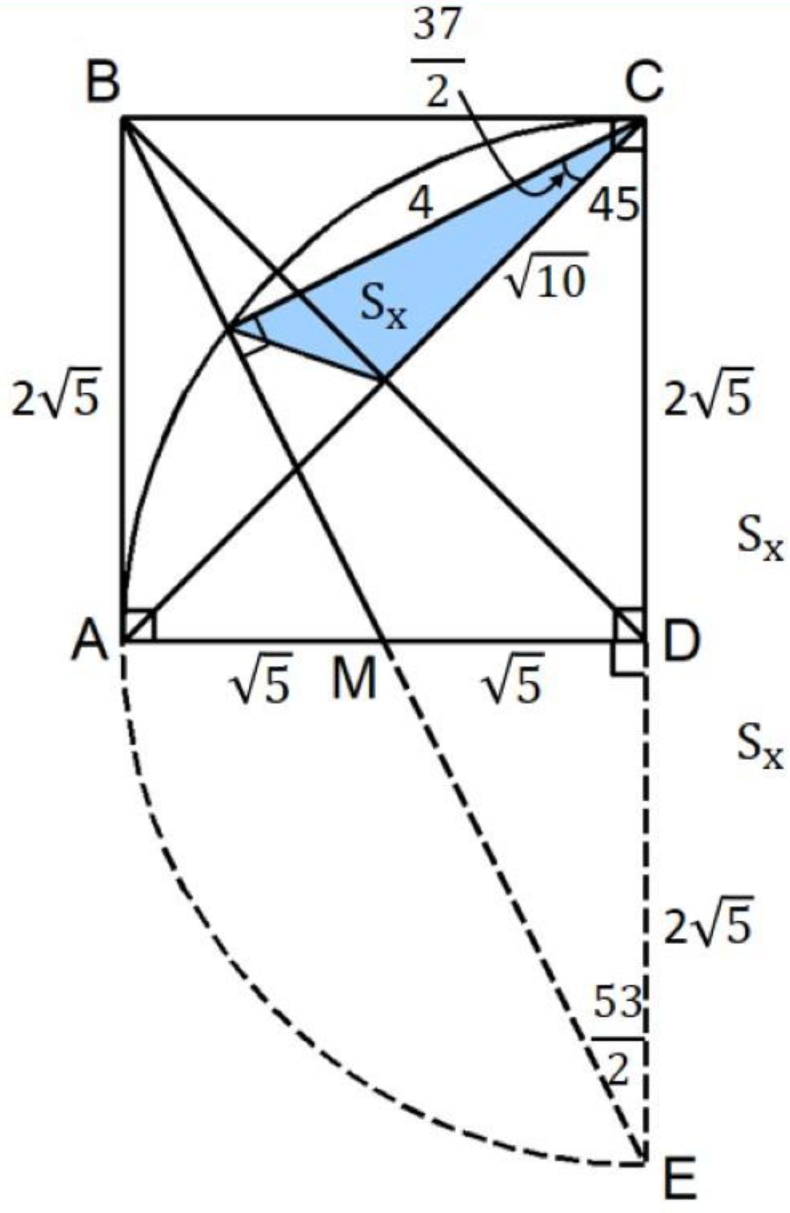
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11. Calcular el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide $2\sqrt{5}$, si AM=MD.



A) 1   B) 2   C) 3
D) 4   E) 5

Resolución:



$$S_x = \frac{4.\sqrt{10}}{2}.\operatorname{sen}\frac{37}{2}$$

$$S_x = 2\sqrt{10}.\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore S_x = 2$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AC}$ en T. Se ubican los puntos P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que $\overline{AB} \perp \overline{PT}$ y $\overline{BC} \perp \overline{TQ}$. Si AP.PB+BQ.QC=10, calcular el área de la región triangular ABC.

A) 10 B) 20 C) 25
D) 30 E) 40

Resolución:

Rpta. A

MUCHAS GRACIAS